به نام خدا

مکانیک سیالات

طاهره کاظمی

آنالیز ابعادی و تشابه

آنالیز ابعادی

معادله ابعادی و پارامترهای بدون بعد:

در مکانیک، هر کمیت را می توان برحسب کمیت های اصلی بیان کرد. کمیت های اصلی عبارتند از:

طول: **L**

جرم: **M**

زمان: **T**

دما: **θ**

طول، جرم و زمان کمیت های اصلی می باشند.

برای مثال دیمانسیون سرعت و نیرو به صورت زیر است:

$$V = \frac{\Delta x}{t} \equiv \frac{L}{T} \equiv LT^{-1}$$

$$F = ma \equiv (M)(LT^{-2}) \equiv MLT^{-2}$$

اگر دیمانسیون گروهی از کمیات مختلف هنگامی که در هم ضرب شوند یا به هم تقسیم گردند، برابر واحد باشد، در آن صورت به آن یک پارامتر بدون بعد گفته می شود. به عنوان مثال پارامتر زیر یک پارامتر بدون بعد است:

$$\frac{\rho VD}{\mu} \equiv \frac{(ML^{-3})(LT^{-1})(L)}{(ML^{-1}T^{-1})} \equiv 1$$

جدول زیر برخی از کیمت های مهم را در مکانیک سیالات همراه با علامت، واحد و دیمانسیون آن ها را نشان می دهد:

کمیت‌های مهم در مکانیک سیالات

کمیت	علامت	واحد (SI)	دیمانسیون
طول	L	m	L
جرم	m	kg	M
زمان	t	s	T
نیرو	F	$N = kg \cdot m/s^2$	MLT^{-2}
سرعت	V	m/s	LT^{-1}
شتاب	a	m/s^2	LT^{-2}
شتاب جاذبه	g	m/s^2	LT^{-2}
مساحت	A	m^2	L^2
حجم	V یا $\forall$	m^3	L^3
زاویه	θ	rad	1
سرعت زاویه‌ای	ω	rad/s	T^{-1}
فرکانس	f	$s^{-1} = Hz$	T^{-1}

$ML^{-1}T^{-2}$	$Pa = N/m^2$	P	فشار
$ML^{-1}T^{-2}$	Pa	τ	تنش
$ML^{-2}T^{-2}$	N/m^3	γ	وزن مخصوص
ML^{-3}	kg/m^3	ρ	دانسیته
MT^{-1}	kg/s	$\dot{m}$	دبی جرمی
L^3T^{-1}	m^3/s	Q	دبی حجمی
$ML^{-1}T^{-1}$	$Pa.s = kg/m.s$	μ	ویسکوزیته دینامیکی
L^2T^{-1}	m^2/s	ν	ویسکوزیته سینماتیکی
$ML^{-1}T^{-2}$	Pa	K	مدول الاستیسیته حجمی
MT^{-2}	N/m	σ	کشش سطحی
ML^2T^{-2}	$N \cdot m$	T	گشتاور
ML^2T^{-2}	$J = N \cdot m$	W	کار
ML^2T^{-2}	J	E	انرژی
ML^2T^{-3}	$W = J/s$	N یا P	توان

نکته: کمیت های اصلی را می توان به صورت طول(L)، نیرو(F) ، زمان(T) و دما(θ) هم بیان کرد که در آن $F = MLT^{-2}$ می باشد. در این حالت ما به جای سیستم MLTθ ، سیستم FLTθ خواهد بود.

تجانس ابعادی:

فرض کنید ......+Z=a+b+c نشان دهنده یک معادله فیزیکی باشد، شرط لازم و کافی برای تجانس (همگنی) ابعادی آن است که اولا دیمانسیون a و b , c , ... یکی باشد، دوما بعد آن ها با بعد Z که در طرف دیگر معادله قرار دارد، یکسان باشد.

آنالیز ابعادی و روش های آن:

منظور از آنالیز ابعادی، گروه بندی متغیرهای موثر در یک پدیده فیزیکی به گروه های بدون بعد است. هرکی از این گروه های بدون بعد، π نامیده می شوند. باید توجه داشت که شناخت و تعین متغیرهای موثر، از ضابطه خاصی تبعیت نمی کند و تنها بر اساس تجربه و قضاوت مهندسی است. مزیت استفاده از آنالیز ابعادی موثر، در کاهش تعداد تنغیرهای مسئله و به کارگیری نتایج فشارده حاصل برای تمام وضعیت هاست.

برای مثال فرض کنید یک جسم کروی به قطر D ، درون سیالی با ویسکوزیته μ و دانسیته ρ، با سرعت ثابت V در حال حرکت است. اگر نیروی مقاوم وارده از جانب سیال ب جسم کروی را با F نشان دهیم، در آن صورت می توان حدس زد که در این حالت D, V, ρ, μ, F متغیرهای موثر می باشند پس می نویسیم:

$$f(F, \rho, \mu, V, D) = 0 \quad (f \text{ تابع است})$$

استفاده از آنالیز ابعادی می توان متغیرهای مذکور را به دو پارامتر بدون بعد $\pi_1 = \frac{\rho VD}{\mu}$ و $\pi_2 = \frac{F}{V^2D^2\rho}$ کاهش داد. بنابراین می نویسیم:

$$\phi\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}, \frac{\rho VD}{\mu}\right) = 0 \quad (\phi \text{ تابع است})$$

همچنین می توانیم رابطه ای برای محاسبه مقدار نیروی F به دست آوریم. در این حالت با توجه به اینکه هر پارامتر بدون بعد را می توان به صورت تابعی از دیگر پارامترهای بی بعد نوشت، خواهیم داشت:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = \lambda\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) \Rightarrow F = \lambda\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)\rho V^2 D^2 \qquad (\lambda \text{ تابع است})$$

برای تشخیص تعداد پارامترهای بدون بعد π از روش های زیر استفاده می شود:

الف- قضیه π– باکینگهام:

این قضیه ثابت می کند که هرگاه یک مسئله فیزیکی شامل n کمیت (متغیر) باشد، به طوری که در این کمیت ها، m بعد اصلی وود داشته باشند، در آن صورت کمیت های بالا را می توان به صورت j=n-m پارامتر بدون بعد مساقل، مرتب کرد. لازم به ذکر است که ابعاد اصلی ظاهر شونده در یک مسئله فیزیکی شامل طول، جرم و زمان می باشند. بنابراین حداکثر مقدار m در این حالت برابر ۳ خواهد بود.

نحوه تعیین پارامترهای بدون بعد π بر اساس قضیه π– باکینگهام به شرح زیر است:

گام اول: کمیت های فیزیکی موجود در مسئله را همراه با دیمانسیونشان می نویسیم:

۱- نیروی مقاوم وارد بر جسم کروی: $F = MLT^{-2}$

۲- دانسیته سیال: $\rho = ML^{-3}$

۳- ویسکوزیته دینامیکی سیال: $\mu = ML^{-1}T^{-3}$

۴- قطر جسم کروی: $D = L$

۵- سرعت حرکت جسم کروی : $V = LT^{-1}$

یعنی n=5 است و می نویسیم:

$$f(F, \rho, \mu, V, D) = 0$$

گام دوم: تعداد پارامترهای بدون بعد را با استفاده از قضیه π– باکینگهام به دست می آوریم. در این مساله ۵ کمیت (n=5) نوشته شده در گام قبلی، شامل همه ابعاد اصلی می باشند. پس m=3 است و خواهیم داشت:

$$j = n - m = 5 - 3 = 2 \longrightarrow \emptyset(\pi_1, \pi_2) = 0$$

گام سوم: از بین n کمیت موجود، تعداد m کمیت را انتخاب می کنیم و آن ها را متغیرهای تکراری می نامیم. متغیرهای تکراری بایستی ابعادشان متفاوت بوده و مجموعا m بعد اصلی را شامل می شوند در این مساله از میان ۵ کمیت F, ρ, V, D, μ ، سه کمیت ρ, V, D را به عنوان متغیرهای تکراری و دو کمیت باقی مانده را به عنوان متغیرهای جانشین در نظر می گیریم.

گام چهارم: هر عامل π را به صورت حاصل ضرب متغیرهای تکراری و یک متغیر جانشین می نویسیم. سپس به متغیرهای تکراری، نماهای مختلف x, y , z و به متغیر جانشین، نمای یک را می دهیم:

$$\pi_1=\rho^{x_1}V^{y_1}D^{z_1}\mu \quad , \quad \pi_2=\rho^{x_2}V^{y_2}D^{z_2}F$$

گام پنجم: در این مرحله دیمانسیون هریک از کمیت ها را در معادلات π قرار می دهیم که با توجه به بدون بعد بودن π($M^0L^0T^0=1$) و تجانس ابعادی، به یک دستگاه سه معادله، سه مجهول برای هر π خواهیم رسید. حل دستگاه های مذکور، مقادیر x, y , z را به دست می دهد و در نتیجه پارامترهای بدون بعد مشخص می شوند:

$$\pi_1=\rho^{x_1}V^{y_1}D^{z_1}\mu \Rightarrow M^0L^0T^0\equiv(ML^{-3})^{x_1}(LT^{-1})^{y_1}(L)^{z_1}(ML^{-1}T^{-1})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+1=0\\-3x_1+y_1+z_1-1=0\\-y_1-1=0\end{cases}\longrightarrow x_1=y_1=z_1=-1\longrightarrow \pi_1=\frac{\mu}{\rho VD}$$

$$\pi_2=\rho^{x_2}V^{y_2}D^{z_2}F \Rightarrow M^0L^0T^0\equiv(ML^{-3})^{x_2}(LT^{-1})^{y_2}(L)^{z_2}(MLT^{-2})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_2+1=0\\-3x_2+y_2+z_2+1=0\\-y_2-2=0\end{cases}\longrightarrow x_2=-1,\ y_2=-2,\ z_2=-2\longrightarrow \pi_2=\frac{F}{\rho V^2D^2}$$

یعنی می توان نوشت:

$$\phi\left(\pi_1=\frac{\mu}{\rho VD},\ \pi_2=\frac{F}{\rho V^2D^2}\right)=0$$

ب) روش رایتمایر-هانساکر:

در این روش ابتدا ابعاد اصلی M, L و Tرا بر حسب متغیرهای تکراری بیان می کنیم. انگاه روابط حاصله را در دیمانسیون سایر کمیت ها (متغیرهای جانشین) قرار می دهیم تا پارامترهای بدون بعد به دست آیند.

مراحل به دست آوردن پارامترهای بدون بعد با استفاده از روش رایتماز-هانساکر به صورت زیر است:

۱- متغیرهای تکراری ρ, V, D را همراه با دیمانسیون می نویسیم:

$$D\equiv L\ ,\ V\equiv LT^{-1}\ ,\ \rho\equiv ML^{-3}$$

۲- ابعاد اصلی را برحسب متغبرهای تکراری بیان می کنیم:

$$L\equiv D$$

$$V\equiv LT^{-1}\Rightarrow V\equiv DT^{-1}\Rightarrow T\equiv DV^{-1}$$

$$\rho\equiv ML^{-3}\Rightarrow \rho\equiv MD^{-3}\Rightarrow M\equiv\rho D^3$$

۳- با جایگذاری مستقیم روابط فوق در دیمانسیون متغیرهای جانشین، یعنی و ، پارامترهای بدون بعد را به دست می آوریم:

$$\mu\equiv ML^{-1}T^{-1}\equiv(\rho D^3)(D^{-1})(D^{-1}V)\equiv\rho VD\Rightarrow \pi_1=\frac{\mu}{\rho VD}$$

$$F\equiv MLT^{-2}\equiv(\rho D^3)(D)(D^{-2}V^2)\equiv\rho V^2D^2\Rightarrow \pi_2=\frac{F}{\rho V^2D^2}$$

نکته: در مورد پارامترهای بدون بعد (عامل های π) می توان به نکات زیر اشاره کرد:

۱- درصورتی که دو کمیت دارای ابعاد یکسان باشند، نسبت آن ها یک عامل π است.

۲- در صورتی که یک کمیت بدون بعد داشته باشیم، خود آن یک عامل π است.

۳- هر توانی از یک عامل π ، خود یک عامل π است.

۴- حاصل رب یا تقسیم π ها یک عامل π است.

نکته: چنانچه در یک مسئله هر کدام از متغیرهای ρ, V, L وجود داشته باشند، بهترین گزینه برای متغیرهای تکراری هستند.

مثال ۱: در یک جریان متلاطم در داخل لوله صاف، افت انرژی در واحد طول ($\frac{\Delta H}{L}$) تابعی از سرعت متوسط جریان، قطر لوله، شتاب ثقل، ویسکوزیته دینامیکی و جرم مخصوص سیال می باشد. مطلوب است تعیین پارامترهای بدون بعد در این مسئله

الف) با استفاده از قضیه π−

ب) با استفاده از روش رایتمایر-هانساکر

الف) تعیین پارامترهای بدون بعد با استفاده از قضیه π− باکینگهام

ابتدا کمیت های فیزیکی موجوددر مسئله را همراه با دیمانسیون می نویسیم:

۱- افت انرژی در واحد طول	$\frac{\Delta H}{L} \equiv 1$
۲- سرعت متوسط جریان	$V \equiv LT^{-1}$
۳- قطر لوله	$D \equiv L$
۴- شتاب ثقل	$g \equiv LT^{-2}$
۵- ویسکوزیتهٔ دینامیکی	$\mu \equiv ML^{-1}T^{-1}$
۶- جرم مخصوص سیال	$\rho \equiv ML^{-3}$

رابطه متغیرها در این حالت به صورت زیر است:

$$f(\frac{\Delta H}{L}, V, D, g, \mu, \rho) = 0$$

می خواهیم این رابطه را برحسب پارامترهای بدون بعد گروه بندی کنیم:

($\frac{\Delta H}{L}$) یک کمیت بدون بعد است، بنابراین از لیست متغیرها حذف شده و به عنوان یک عامل π معرفی می شود، یعنی از این پس n=5 می باشد. در سایر متغیرها نیز سه کمیت اصلی T, L, M ظاهر شده اند یعنی m=3 است، بنابراین می توان گفت که علاوه بر ($\frac{\Delta H}{L}$) ، به تعداد j=n-m=5-3=2، پارامتربدون بعد (عاملπ) دیگر نیز خواهیم داشت. حال اگر D, V, ρ را به عنوان متغیرهای تکراری در نظر بگیریم، در آن صورت پارامترهای بدون بعد به صورت زیر بیان می شوند:

$$\pi_1 = \rho^{x_1} V^{y_1} D^{z_1} \mu \quad , \quad \pi_2 = \rho^{x_2} V^{y_2} D^{z_2} g$$

با جایگذاری دیمانسیون هر کمیت در معادلات π خواهیم داشت:

$$\pi_1 = \rho^{x_1} V^{y_1} D^{z_1} \mu \;\Rightarrow\; M^0 L^0 T^0 \equiv (ML^{-3})^{x_1} (LT^{-1})^{y_1} (L)^{z_1} (ML^{-1}T^{-1})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+1=0 \\ -3x_1+y_1+z_1-1=0 \\ -y_1-1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow\; x_1=y_1=z_1=-1 \;\Rightarrow\; \pi_1=\frac{\mu}{\rho V D}$$

$$\pi_2 = \rho^{x_2} V^{y_2} D^{z_2} g \quad \Rightarrow\; M^0 L^0 T^0 \equiv (ML^{-3})^{x_2} (LT^{-1})^{y_2} (L)^{z_2} (LT^{-2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2=0 \\ -3x_2+y_2+z_2+1=0 \\ -y_2-2=0 \end{cases} \quad \Rightarrow\; x_2=0,\; y_2=-2,\; z_2=1 \;\Rightarrow\; \pi_2=\frac{gD}{V^2}$$

یعنی می توان نوشت:

$$\phi\left(\pi_1=\frac{\mu}{\rho V D},\; \pi_2=\frac{gD}{V^2},\; \pi_3=\frac{\Delta H}{L}\right)=0$$

ب) تعیین پارامترهای بدون بعد با استفاده از روش رایتمایر-هانساکر

۱- متغیرهای تکراری D, V, ρ را همراه با دیمانسیونشان می نویسیم:

$$D \equiv L \;,\; V \equiv LT^{-1} \;,\; \rho \equiv ML^{-3}$$

$$L \equiv D$$

۲- ابعاد اصلی را برحسب متغیرهای تکراری بیان می کنیم:

$$V \equiv LT^{-1} \;\Rightarrow\; V \equiv DT^{-1} \;\Rightarrow\; T \equiv DV^{-1}$$

$$\rho \equiv ML^{-3} \;\Rightarrow\; \rho \equiv MD^{-3} \;\Rightarrow\; M \equiv \rho D^3$$

۳- با جایگذاری مستقیم روابط بالا در دیمانسیون متغیرهای جانشین، یعنی g و μ، پارامترهای بدون بعد را به دست می آوریم:

$$g \equiv LT^{-2} \equiv (D)(D^{-2}V^2) \equiv D^{-1}V^2 \;\Rightarrow\; \pi_1=\frac{gD}{V^2}$$

$$\mu \equiv ML^{-1}T^{-1} \equiv (\rho D^3)(D^{-1})(D^{-1}V) \equiv \rho V D \;\Rightarrow\; \pi_2=\frac{\mu}{\rho V D}$$

پس رابطه پارامترهای بدون بعد، به صورت زیر خواهد بود:

$$\phi\left(\pi_1=\frac{gD}{V^2},\; \pi_2=\frac{\mu}{\rho V D},\; \pi_3=\frac{\Delta H}{L}\right)=0$$

معرفی پارامترهای بدون بعد مهم در مکانیک سیالات:

در بیشتر پدیده های سیالات صرف نظر از دما، متغیرهای جرم مخصوص (ρ)، سرعت (v)، طول مشخصه (l)، تغییرفشار (ΔP)، کشش سطحی (σ)، سرعت صوت (C)، لزجت (μ) و شتاب جاذبه (g) حائز اهمیت هستند. حال اگر بخواهیم از این ۸ متغیر، پارامترهای بدون بعد بسازیم، طبق قضیه π –باکینگهام و با توجه به اینکه هر سه کمیت اصلی در متغیرها ظاهر شده اند، به تعداد $j = n - m = 8 - 3 = 5$ پارامتر بدون بعد در مساله ظاهر می شود که با استفاده از روش های گفته شده در آنالیز ابعادی به صورت زیر خواهند بود:

۱- عدد رینولدز $Re = \dfrac{\rho V l}{\mu}$

۲- عدد فرود $Fr = \dfrac{V}{\sqrt{gl}}$

۳- عدد ماخ $M = \dfrac{V}{C}$

۴- عدد وبر $We = \dfrac{\rho V^{2} l}{\sigma}$

۵- عدد اویلر $Eul = \dfrac{\Delta P}{\rho V^{2}}$

اعداد بالا برای مرتب کردن داده های تجربی به کار می روند و در واقع نسبت نیروی اینرسی و یکی از نیروهای موثر در حرکت سیال اند.

نیروهای موثر در حرکت سیال عبارتند از نیروی لزجت، نیروی ثقل، نیروی فشار، نیروی کشش سطحی و نیروی الاستیسیته که به صورت زیر محاسبه می شود:

الف ـ نیروی لزجت: $F_\mu = \tau \cdot A \equiv \mu V l$

ب ـ نیروی ثقل: $F_g = mg \equiv \rho l^{3} g$

ج ـ نیروی فشار: $F_P = P \cdot A \equiv P l^{2}$

د ـ نیروی کشش سطحی: $F_\sigma = \sigma \cdot L \equiv \sigma l$

هـ ـ نیروی الاستیسیته: $F_K = K \cdot A \equiv K l^{2}$

در مورد نیروی اینرسی نیز می توان گفت هرگاه برآیند نیروهای وارد بر یک جسم متحرک برابر صفر نشود، این جسم بر اساس قانون دوم نیوتن دارای شتاب خواهد بود. چنین سیستمی از نیروهای نامتعادل را می توان با اضافه کردن نیروی F_i که برابر و در جهت مخالف برآیند نیروهای وارد بر جسم است، به سیستمی متعادل تبدیل کرد. نیروی F_i که باعث تعادل سیستم مذکور شده است، نیروی اینرسی نامیده می شود که می توان با لحاظ کردن آن برای حجم کنترل، در جریان یک سیال نوشت:

$$F_i = \sum F = \rho Q \Delta V \equiv \rho V^{2} l^{2}$$

در زیر اعداد بدون بعد را به صورت نسبت از نیروهای اینرسی و نیروهای موثر در حرکت سیال را بیان می کند:

۱- عدد رینولدز

$$Re = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{\rho V^{2} l^{2}}{\mu V l} \equiv \frac{F_i}{F_\mu} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی لزجت}}$$

۲- عدد فرود

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gl}} = \left(\frac{V^{2}}{gl}\right)^{0.5} = \left(\frac{\rho V^{2} l^{2}}{\rho l^{3} g}\right)^{0.5} \equiv \left(\frac{F_i}{F_g}\right)^{0.5} = \left(\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ثقل}}\right)^{0.5}$$

۲- عدد ماخ

$$M = \frac{V}{C} = \left(\frac{V^{2}}{C^{2}}\right)^{0.5} = \left(\frac{\rho V^{2} l^{2}}{\rho C^{2} l^{2}}\right)^{0.5}$$

همانطور که می دانیم سرعت انتشار صوت در یک سیال، از رابطه $C = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ به دست می آید. در این رابطه K مدول االاستیسیته حجمی یا ضریب بالک است و ρ دانسیته سیال می باشد. بنابراین داریم:

$$M = \left(\frac{\rho V^۲ l^۲}{K l^۲}\right)^{۰/۵} \equiv \left(\frac{F_i}{F_K}\right) = \left(\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی الاستیسیته}}\right)^{۰/۵}$$

۴- عدد وبر

$$We = \frac{\rho V^۲ l}{\sigma} = \frac{\rho V^۲ l^۲}{\sigma l} \equiv \frac{F_i}{F_\sigma} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی کشش سطحی}}$$

۵- عدد اویلر

$$Eul = \frac{\Delta P}{\rho V^۲} = \frac{\Delta P l^۲}{\rho V^۲ l^۲} \equiv \frac{F_P}{F_i} = \frac{\text{نیروی فشاری}}{\text{نیروی اینرسی}}$$

نکته: در به کارگیری عدد اویلر، می توان به جای تغییرات فشار در صورت کسر، از فشار استفاده کرد. همچنین بعضی مواقع عدد اویلر با لحاظ کردن عامل $\frac{1}{2}$ در مخرج کسر به صورت $\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}$ نوشته می شود که در این حالت به آن ضریب فشار می گویند و معمولا با $\mathcal{C}$ نشان می دهند.

مثال ۲: در طراحی یک سرریز، ابتدا مدلی از آن ساخته می شود که ابعادش ۱۶ برابر کوچک تر از نمونه اصلی است. چنانچه سرعت جریان در یک نقطه از سرریز مدل برابر m/s ۱ اندازه گیری شود، با فرض برابری عدد فرود در نمونه اصلی و مدل، سرعت جریان در نقطه متناظر در نمونه اصلی چقدر است؟

اگر مدل را با اندیس m و نمونه اصلی را با اندیس ρ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$(Fr)_m = (Fr)_p \;\Rightarrow\; \left(\frac{V}{\sqrt{gl}}\right)_m = \left(\frac{V}{\sqrt{gl}}\right)_p \;\Rightarrow\; \frac{۱}{\sqrt{l}} = \frac{V_p}{\sqrt{۱۶ l}} \;\Rightarrow\; V_p = ۴\ m/s$$

مثال ۳: مدلی از یک لوله وانتوری با مقیاس $\frac{1}{5}$ نمونه اصلی، ساخته شده است. در نمونه اصلی آب ۲۰ c با ویسکوزیته سینماتیکی $1 \times 10^{-6}\ m^2/s$ و در مدل، آب c ۹۵ با ویسکوزیته سینماتیکی $0.3 \times 10^{-6}\ m^2/s$جریان دارد، قطر گلوگاه نمونه اصلی ۵۰۰ میلی متر و سرعت در آن m/s ۶ است. با فرض برابری عدد رینولدز د مدل و نمونه اصلی، دبی عبوری از مدل را محاسبه کنید؟

$$(Re)_m = (Re)_p \;\Rightarrow\; \left(\frac{VD}{\nu}\right)_m = \left(\frac{VD}{\nu}\right)_p \;\Rightarrow\; \frac{V_m \times ۱۰۰}{۰/۳ \times ۱۰^{-۶}} = \frac{۶ \times ۵۰۰}{۱ \times ۱۰^{-۶}} \;\Rightarrow\; V_m = ۹\ m/s$$

$$Q_m = V_m \left(\frac{\pi D_m^۲}{۴}\right) = (۹)\left(\frac{\pi \times ۰/۱^۲}{۴}\right) = ۰/۰۶۷۵\ m^۳/s \;=\; ۶۷/۵\ lit/s$$

تشابه هندسی:

بین مدل (m) و پروتوتیپ (p) زمانی تشابه هندسی وجود دارد که نسبت ابعاد خطی متناظر آن ها مساوی باشد. این نسبت برقرار شده بین ابعاد خطی را، مقیاس یا اشل هندسی می گویند و با "L_r" نشان می دهند.

اشل هندسی در واقع نسبت بین طول های متناظر مدل و پروتوتیپ (نمونه اصلی) است.

$$\boxed{L_r = \frac{l_m}{l_p}}$$

لازم به ذکر است که رابطه نسبت مساحت ها و نسبت حجم ها در مدل و نمونه اصلی را می توان بر اساس مقیاس "L_r" به صورت زیر بیان کرد:

$$A_r = \frac{A_m}{A_p} = L_r^{۲} \quad , \quad \forall_r = \frac{\forall_m}{\forall_p} = L_r^{۳} \qquad (\forall = \text{حجم})$$

۲- تشابه سینماتیکی:

بین مدل (m) و پروتوتیپ (p) زمانی تشابه سینماتیکی وجود دارد که سرعت ها در نقاط متناظر مدل و پروتوتیب هم جهت بوده و نسبت آن ها برابر مقدار ثابتی باشد. مقدار ثابت برقرار شده بین سرعت ها را مقیاس سرعت نامیده و آن را با "V_r" نشان می دهند. تشابه سینماتیکی در واقع بیانگر تشابه هندسی خطوط جریان در ندل و پروتوتیپ (نمونه اصلی) است.

$$\boxed{V_r = \frac{V_m}{V_p}}$$

توجه کنید که لازمه تشابه سینماتیکی بین مدل و نمونه اصلی، تشابه هندسی است زیرا مرزهای جریان در مدل و نمونه اصلی، علاوه بر اینکه جزئی از ابعاد خطی سیستم هستند، خود به عنوان خطوط جریان هم به حساب می آیند که باید بین آن ها تشابه هندسی برقرار باشد.

۳- تشابه دینامیکی:

بین مدل (m) و پروتوتیپ (p) زمانی تشابه سینماتیکی وجود دارد که اولا بین آن ها تشابه هندسی و سینماتیکی برقرار باشد، ثانیا بین نیروهای همان در نقاط متناظر مدل و پروتوتیپ (نمنمونه اصلی) نسبت ثابتی وجود داشته باشد، مقدار ثابت برقرار شده بین نیروها را مقیاس نیرو می گویند و با "F_r" نشان می دهند.

$$\boxed{F_r = \frac{(F_g)_m}{(F_g)_p} = \frac{(F_\mu)_m}{(F_\mu)_p} = \cdots = \frac{(F_i)_m}{(F_i)_p}}$$

رابطه بالا نشان می دهد که برای برقراری تشابه دینامیکی بین مدل و نمونه اصلی بایستی کلیه اعداد بدون بعد در مدل و نمونه ها با هم برابر باشند.

$$\frac{(F_g)_m}{(F_g)_p} = \frac{(F_i)_m}{(F_i)_p} \Rightarrow \left(\frac{F_i}{F_g}\right)_m = \left(\frac{F_i}{F_g}\right)_p \Rightarrow (Fr)_m = (Fr)_p$$

$$\frac{(F_\mu)_m}{(F_\mu)_p} = \frac{(F_i)_m}{(F_i)_p} \Rightarrow \left(\frac{F_i}{F_\mu}\right)_m = \left(\frac{F_i}{F_\mu}\right)_p \Rightarrow (Re)_m = (Re)_p$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

باید توجه کرد که تحقق کامل شرایط بالا عملا غیرممکن است، مگر آن که مقیاس یک به یک (۱:۱) باشد. خوشبختانه در بسیاری از موارد تنها دو نیروی مهم وجود دارند، به طوری که می توان از اثر سایر نیروها صرف نظر کرد. در مدل های هیدرولیکی بسته به این که در پدیده مورد مطالعه، کدام یک از نیروهای موثر حضور داشته باشند، قوانین تشابه متفاوتی به کار می رود. از جمله مهم ترین تشابه های دینامیکی، تشابه رینولدز و تشابه فرود می باشند.

الف) تشابه رینولدز:

در جریان های لزج که دارای سرعت پایین و فاقد سطح آزاد می باشند، اینرسی و لزجت نیروهای اصلی و غالب هستند. بنابراین می توان با صرف نظر کردن از اثر بقیه نیروها و برابری عدد رینولدز در مدل و نمونه اصلی، تشابه دینامیکی را برقرار کرد.جریان داخل لوله ها، حرکت زیردریایی در اعماق آب، آزمایش تونل آب، آزمایش تونل باد (به شرطی که سرعت زیاد نباشد و یا تراکم ناپذیری هوا با ثابت بودن فشار و دما مسجل شود) و حرکت یک جسم پرتاب شده در هوا با سرعت پایین، نمونه هایی از مواردی است که در آن ها تشابه رینولدز به کار می رود.

در تشابه رینولدز دانستن رابطه مقیاس سرعت (V_r) حائز اهمیت بوده و کمک فراوانی در حل مسائل خواهد کرد. در این حالت داریم:

$$(Re)_m = (Re)_p \Rightarrow \frac{V_m l_m}{v_m} = \frac{V_p l_p}{v_p} \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = (\frac{l_p}{l_m})(\frac{v_m}{v_p})$$

$$\Rightarrow \boxed{V_r = \frac{۱}{L_r}(\frac{v_m}{v_p})}$$

حال اگر سیال مدل و نمونه اصلی یکسان بوده و شرایط مشابهی نیز داشته باشند، در آنصورت خواهیم داشت:

$$v_m = v_p \Rightarrow \boxed{V_r = \frac{۱}{L_r}}$$

مثال ۴: قرار است گشتاور وارده از سکان به زیردریایی، با آزمایش مدلی به مقیاس $\frac{1}{20}$ در تونل آب مورد مطالعه قرار گیرد. اگر سرعت آب در تونل برابر با ۱۵ m/s و گشتاور ۵ N.m روی مدل اندازه گیری شده باشد، گشتاور و سرعت نمونه اصلی چقدر است؟

در حرکت زیردریایی از تشابه رینولدز استفاده می کنیم. در این حالت باتوجه به یکسان بودن سیال در مدل و نمونه اصلی خواهیم داشت:

$$(Re)_m = (Re)_p \xrightarrow{v_m = v_p} V_r = \frac{۱}{L_r} \Rightarrow V_p = V_m L_r = ۱۵ \times \frac{۱}{۲۰} = ۰/۷۵ \ m/s$$

برای محاسبه گشتاور وارد بر نمونه اصلی خواهیم داشت:

$$F = ma = (\rho \forall)(\frac{\Delta V}{t}) \equiv (\rho l^۳)(\frac{V}{t}) \equiv \rho (\frac{l}{t})(V)(l^۲) = \rho V^۲ l^۲$$

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{\rho_m V_m^۲ l_m^۲}{\rho_p V_p^۲ l_p^۲} = \frac{\rho_m V_m^۲ l_m^۲}{\rho_p (\frac{V_m l_m}{l_p})^۲ l_p^۲} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \xrightarrow{\rho_m = \rho_p} \frac{F_m}{F_p} = ۱$$

$$\frac{T_m}{T_p} = \frac{F_m l_m}{F_p l_p} = \frac{l_m}{l_p} = L_r \Rightarrow T_p = \frac{T_m}{L_r} = \frac{۵}{\frac{۱}{۲۰}} = ۱۰۰ \ N.m$$

ب) تشابه فرود:

در جریان هایی که دارای سطح آزاد مشخصی هستند، اینرسی و ثقل نیروهای موثر در حرکت سیال اند به نحوی که می توان از اثر نیروها صرف نظر کرد. در این حالت با یکسان قرار دادن عدد فرود در مدل و نمونه اصلی، تقریب خوبی از تشابه دینامیکی برقرار می شود. کانال های روباز، رودخانه ها، پرش هیدرولیکی، امواج سطحی و اثرات آن نظیر جزرومد، تأثیر موج بر شناورها، و سازه هایی چون سرریزها و حوضچه های آرامش، نمونه هایی از مواردی است که در آن تشابه فرود به کار می رود.

در تشابه فرود نیز مانند تشابه رینولدز، دانستن رابطه مقیاس سرعت (V_r) ضروری است. در این حالت داریم:

$$(Fr)_m = (Fr)_p \Rightarrow \frac{V_m}{\sqrt{gl_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{gl_p}} \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{l_m}{l_p}} \Rightarrow \boxed{V_r = \sqrt{L_r}}$$

مثال ۵: مدلی با مقیاس طولی $\frac{1}{400}$ جهت مطالعه جزر و مد امواج ساخته شده است. الف)مدت زمان لازم برای مدل که معادل یک شبانه روز در نمونه اصلی باشد چند ساعت است؟ ب) مقیاس شتاب، نیرو و دبی حجمی را در تشابه فرود به دست آورید.

الف)به هنگام بررسی جزرومد، برقراری تشابه فرود لازم است. بنابراین خواهیم داشت:

$$(Fr)_m = (Fr)_p \Rightarrow V_r = \sqrt{L_r}$$

از طرفی در تشابه فرود، مقیاس زمان برابر است با:

$$t_r = \frac{L_r}{V_r} = \frac{L_r}{\sqrt{L_r}} = \sqrt{L_r}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{t_m}{t_p} = \sqrt{L_r} \Rightarrow \frac{t_m}{۲۴} = \sqrt{\frac{۱}{۴۰۰}} \Rightarrow t_m = ۱/۲ \text{ ساعت}$$

ب)

$$\text{مقیاس شتاب}: a_r = \frac{V_r}{t_r} = \frac{\sqrt{L_r}}{\sqrt{L_r}} = ۱$$

$$\text{مقیاس نیرو}: F_r = m_r \times a_r = (\frac{\rho_m}{\rho_p})(\forall_r)(a_r) = (\frac{\rho_m}{\rho_p})(L_r^{۳})(۱) = L_r^{۳}(\frac{\rho_m}{\rho_p})$$

$$\text{مقیاس دبی}: Q_r = V_r \times A_r = \sqrt{L_r} \times L_r^{۲} = L_r^{۲/۵}$$

مثال ۶ :در مدل سازی یک قطره آب با اشل هندسی $\frac{1}{2}$ در آزمایشگاه که نیروهای ثقل و کشش سطحی نیروهای اصلی اند، از تتراکلرید کربن (S=1.6) استفاده شده است. اگر قطره ذره آب در طبیعت ۲ میلی متر و کشش سطحی در مدل N/m ۰.۰۲۶ باشد، اختلف فشار داخل و خارج قطره آب چند کیلوپاسکل است؟

با توجه به اینکه علاوه بر نیروی اینرسی، نیروهای ثقل و کشش سطحی نیز به عنوان نیروهای اصلی مطرح ده اند، بنابراین بایستی تشابه فرود و تشابه وبر برقرار باشد. از این رو می نویسیم:

$$\begin{cases} (Fr)_m = (Fr)_p \Rightarrow V_r = \sqrt{L_r} \\ (We)_m = (We)_p \Rightarrow \dfrac{\rho_m V_m^{۲} l_m}{\sigma_m} = \dfrac{\rho_p V_p^{۲} l_p}{\sigma_p} \Rightarrow V_r^{۲} = \dfrac{۱}{L_r}(\dfrac{\rho_p}{\rho_m})(\dfrac{\sigma_m}{\sigma_p}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_r = \frac{۱}{L_r}(\frac{\rho_p}{\rho_m})(\frac{\sigma_m}{\sigma_p}) \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{(\frac{۱}{۲})}(\frac{۱}{۱/۶})(\frac{۰/۰۲۶}{\sigma_p}) \Rightarrow \sigma_p = ۰/۰۶۵\ N/m$$

$$\Delta P_p = \frac{۴\sigma_p}{d_p} = \frac{۴ \times ۰/۰۶۵}{۰/۰۰۲} = ۱۳۰\ Pa$$

مثال ۷: افت فشار در یک لوله ونتوری به دانسیته سیال (ρ)، سرعت جریان (V)، قطر لوله (D) و قطر گلوگاه ونتوری متر (d) بستگی دارد. اگر مدلی از یک لوله ونتوری برای آب با دانسیته kg/m3 ۱۰۰۰ و سرعت m/s ۴، افت فشار را برابر kpa ۵ نشان دهد، قطر خط لوله چقدر خواهد بود؟ افت فشار در خطوط لوله اصلی kpa ۱۵، دبی جریان m3/s ۰.۱۳۵ و دانسیته سیال برابر kg/m3 ۷۵۰ می باشد.

ابتداوضعیت متغیرها و پارامترهای بدون بعد را مشخص می کنیم:

$$f(\Delta P, \rho, V, D, d) = ۰ \quad , \quad j = n - m = ۵ - ۳ = ۲$$

با انتخاب به عنوان متغیرهای تکراری و با استفاده از روش رایتمایر-هانساکر خواهیم داشت:

$$D \equiv L, V \equiv LT^{-۱}, \rho \equiv ML^{-۳}$$

$$\begin{cases} L \equiv D \\ V \equiv LT^{-۱} \Rightarrow V \equiv DT^{-۱} \Rightarrow T \equiv DV^{-۱} \\ \rho \equiv ML^{-۳} \Rightarrow \rho \equiv MD^{-۳} \Rightarrow M \equiv \rho D^{۳} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d \equiv L \equiv D \Rightarrow \pi_۱ = \dfrac{d}{D} \\ \Delta P \equiv ML^{-۱}T^{-۲} \equiv \rho D^{۳} D^{-۱} D^{-۲} V^{۲} \equiv \rho V^{۲} \Rightarrow \pi_۲ = \dfrac{\Delta P}{\rho V^{۲}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(\pi_۱ = \frac{d}{D}, \pi_۲ = \frac{\Delta p}{\rho V^{۲}}) = ۰$$

با یکسان قرار دادن پارامترهای بدون بعد در مدل و نمونه اصلی، می نویسیم:

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{D}\right)_m = \left(\frac{d}{D}\right)_p \Rightarrow \frac{d_m}{d_p} = \frac{D_m}{D_p} = L_r \Rightarrow \text{برقراری تشابه هندسی} \\ \left(\frac{\Delta P}{\rho V^{۲}}\right)_m = \left(\frac{\Delta P}{\rho V^{۲}}\right)_p \Rightarrow \frac{۵}{۱۰۰۰ \times ۴^{۲}} = \frac{۱۵}{۷۵۰ \times V_p^{۲}} \Rightarrow V_p = ۸\ m/s \end{cases}$$

$$Q_p = A_p V_p = \left(\frac{\pi D_p^{۲}}{۴}\right) V_p \Rightarrow ۰/۱۳۵ = \left(\frac{\pi \times D_p^{۲}}{۴}\right)(۸) \Rightarrow D_p = ۰/۱۵\ m$$

تمرین۱: سرعت موج دریا در آب های عمیق (C0) تابعی از طول موج (λ) و شتاب ثقل (g) است.شکل کلی معادله سرعت موج چیست؟ (k ضریب بدون بعد است.)

$$C_{۰} \equiv LT^{-۱},\ \lambda \equiv L\ ,\ g \equiv LT^{-۲},\ j = n - m = ۳ - ۲ = ۱$$

حال با استفاده از روش رایتمایر-هانساکر داریم:

$$L \equiv \lambda\ ,\ C_{۰} \equiv LT^{-۱} \equiv \lambda T^{-۱} \Rightarrow T \equiv \lambda C_{۰}^{-۱}$$

$$g \equiv LT^{-۲} \equiv (\lambda)(\lambda C_{۰}^{-۱})^{-۲} \equiv \lambda^{-۱} C_{۰}^{۲} \Rightarrow \pi_{۱} = \frac{g}{\lambda^{-۱} C_{۰}^{۲}} = \frac{\lambda g}{C_{۰}^{۲}} \Rightarrow k = \frac{C_{۰}}{\sqrt{\lambda g}} \Rightarrow C_{۰} = k\sqrt{\lambda g}$$

تمرین۲: راندمان یک توربین (η) بستگی به چگالی سیال (ρ)، سرعت زاویه ای (ω)، لزجت دینامیکی (μ)، قطر موتور (D) و دبی سیال (Q) دارد. شکل عمومی معادله η با چه رابطه ای بیان می شود؟

ابتدا دیمانسیون متغیرهای موثر در مسئله و سپس تعداد کمیت های بدون بعد را به دست می آوریم:

$$\eta \equiv 1 ,\ \rho \equiv ML^{-3} ,\ \omega \equiv T^{-1} ,\ \mu \equiv ML^{-1}T^{-1} ,\ D \equiv L \ ,\ Q \equiv L^{3}T^{-1}$$

$$j = n - m = 6 - 3 = 3$$

حال با انتخاب D, ω, ρ به عنوان متغیرهای تکراری و با استفاده از روش $\pi-$ باکینگهام داریم:

$$\pi_1 = \rho^{x_1}\omega^{y_1}D^{z_1}\mu \ ,\ \pi_2 = \rho^{x_2}\omega^{y_2}D^{z_2}Q \ ,\ \pi_3 = \eta$$

$$\pi_1 = \rho^{x_1}\omega^{y_1}D^{z_1}\mu \Rightarrow M^0L^0T^0 \equiv (ML^{-3})^{x_1}(T^{-1})^{y_1}(L)^{z_1}(ML^{-1}T^{-1})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1 = 0 \\ -3x_1 + z_1 - 1 = 0 \\ -y_1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = y_1 = -1 \ ,\ z_1 = -2 \Rightarrow \pi_1 = \frac{\mu}{\rho\omega D^2}$$

$$\pi_2 = \rho^{x_2}\omega^{y_2}D^{z_2}Q \Rightarrow M^0L^0T^0 \equiv (ML^{-3})^{x_2}(T^{-1})^{y_2}(L)^{z_2}(L^3T^{-1})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -3x_2 + z_2 + 3 = 0 \\ -y_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 0 \ ,\ y_2 = -1 \ ,\ z_2 = -3 \Rightarrow \pi_2 = \frac{Q}{\omega D^3}$$

و در نهایت می نویسیم:

$$g\left(\frac{\mu}{\rho\omega D^2}, \frac{Q}{\omega D^3}, \eta\right) = 0 \Rightarrow \eta = f\left(\frac{\mu}{\rho\omega D^2}, \frac{Q}{\omega D^3}\right)$$

تمرین ۳: برای اندازه گیری دبی عبوری از یک لوله، از وانتوری متر با ابعاد خطی ۱۰ برابر کوچکتر از نمونه اصلی استفاده شده است. اگر سطح مقطع ورودی لوله وانتوری متر برابر ۳۰ cm2 باشد و سرعت برای سیال مشابه با نمونه اصلی در این مقطع 5 m/s اندازه گیری شود، در آن صورت دبی گذرنده از لوله در نمونه اصلی چند است؟

با بکارگیری تشابه رینولدز بین مدل و نمونه اصلی داریم:

$$(Re)_m = (Re)_p \Rightarrow \frac{V_m l_m}{\nu_m} = \frac{V_p l_p}{\nu_p} \Rightarrow V_r = \frac{1}{L_r}\left(\frac{\nu_m}{\nu_p}\right)$$

حال با توجه به یکسان بودن سیال در مدل و نمونه اصلی ($\nu_m = \nu_p$)، می نویسیم:

$$V_r = \frac{1}{L_r} \Rightarrow \frac{5}{V_p} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} \Rightarrow V_p = 0.5\ m/s$$

$$Q_p = V_p A_p = V_p\left[\frac{A_m}{L_r^2}\right] = (0.5)\left[\frac{30\times10^{-4}}{0.1^2}\right] = 0.15\ m^3/s \ = 150\ lit/s$$

تمرین ۳: برای اندازه گیری دبی عبوری از یک لوله، از وانتوری متر با ابعاد خطی ۱۰ برابر کوچکتر از نمونه اصلی استفاده شده است. اگر سطح مقطع ورودی لوله وانتوری متر برابر ۳۰ cm2 باشد و سرعت برای سیال مشابه با نمونه اصلی در این مقطع 5 m/s اندازه گیری شود، در آن صورت دبی گذرنده از لوله در نمونه اصلی چند است؟

با بکارگیری تشابه رینولدز بین مدل و نمونه اصلی داریم:

$$(Re)_m = (Re)_p \Rightarrow \frac{V_m l_m}{\nu_m} = \frac{V_p l_p}{\nu_p} \Rightarrow V_r = \frac{1}{L_r}\left(\frac{\nu_m}{\nu_p}\right)$$

حال با توجه به یکسان بودن سیال در مدل و نمونه اصلی ($\nu_m = \nu_p$)، می نویسیم:

$$V_r = \frac{1}{L_r} \Rightarrow \frac{5}{V_p} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} \Rightarrow V_p = 0.5\ m/s$$

$$Q_p = V_p A_p = V_p\left[\frac{A_m}{L_r^2}\right] = (0.5)\left[\frac{30\times10^{-4}}{0.1^2}\right] = 0.15\ m^3/s \ = 150\ lit/s$$

تمرین ۴: برای به دست آوردن گشتاور گردشی روی سطح کنترل یک کشتی، مدلی با مقیاس $\frac{1}{8}$ در تونل آب مورد آزمایش قرار می گیرد. گشتاور اندازه گیری شده در مدل N.m ۱۲ است. گشتاور نمونه واقعی در شرایط مشابه چقدر است؟

$$\begin{cases} T_r = F_r \times L_r \\ F_r = m_r \times a_r \\ m_r = \frac{\rho_m}{\rho_p} L_r^۳ \\ a_r = \frac{V_r^۲}{L_r} \end{cases} \Rightarrow T_r = (\frac{\rho_m}{\rho_p} L_r^۳)(\frac{V_r^۲}{L_r})(L_r) = (\frac{\rho_m}{\rho_p}) V_r^۲ L_r^۳$$

با به کارگیری تشابه رینولدز بین مدل و نمونه اصلی، همچنین یکسان بودن سیاال مدل و نمونه اصلی، خواهیم داشت:

$$T_r = (\frac{\rho_m}{\rho_p}) V_r^۲ L_r^۳ \ ، \ (\frac{\rho_m}{\rho_p}) = ۱ \ ، \ V_r = \frac{۱}{L_r} \ \Rightarrow \ T_r = L_r$$

$$\frac{T_m}{T_p} = L_r \ \Rightarrow \ \frac{۱۲}{T_p} = \frac{۱}{۸} \ \Rightarrow \ T_p = ۹۶ \ N.m$$

تمرین ۵: برای تعیین ضریب افت فشار در نمونه حقیقی از یک زانویی که قطر لوله آن ۲ متر مس باشد، از یک مدل با قطر ۵۰ سانتی متر و با جنس مشابه استفاده شده است. سیال در لوله اصلی می باشد که لزجت سینماتیکی آن $2 \times 10^{-5} \ m^2/s$ اندازه گیری شده است. در حالی که در مدل آزمایشگاهی از سیالی با لزجت سینماتیکی $1 \times 10^{-4} \ m^2/s$ استفاده می شود. اگر دبی جریان لوله اصلی lit/sec ۶۰۰ باشد، سرعت لازم برای سیال در مدل آزمایشگاهی چند m/s است؟

$$(Re)_m = (Re)_p \ \Rightarrow \ V_r = \frac{۱}{L_r}(\frac{\nu_m}{\nu_p}) = \frac{۱}{(\frac{۵۰}{۲۰۰})} \times (\frac{۱\times۱۰^{-۴}}{۲\times۱۰^{-۵}}) = ۲۰ \ \Rightarrow \ V_m = ۲۰ \, V_p$$

از طرفی V_p برابر است با:

$$V_p = \frac{Q_p}{A_p} = \frac{۶۰۰\times۱۰^{-۳}}{(\frac{\pi\times۲^۲}{۴})} = ۰/۲ \ m/s$$

بنابراین V_m برابر است با:

$$V_m = ۲۰ V_p = ۲۰ \times ۰/۲ = ۴ \ m/s$$

تمرین ۶: مقاومت یک کشتی اقیانوس پیما در مقابل موج توسط مدلی به مقیاس $\frac{1}{100}$ اندازه گیری می شود. اگر نیروی دراگ وارد به نمونه اصلی در سرعت m/s ۵ مدنظر باشد، سرعت مدل چقدر باید باشد تا بتوان به طور معقولی از نتایج حاصله بر روی مدل استفاده کرد؟

با به کار گیری تشابه فرود بین مدل و نمونه اصلی داریم:

$$V_r = \sqrt{L_r} \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{L_r} \Rightarrow \frac{V_m}{5} = \sqrt{\frac{1}{100}} \Rightarrow V_m = 0/5 \ m/s$$

تمرین ۷: پمپ به کار رفته در یک سیستم آبیاری دارای توان ۱۰۰ کیلووات است. پمپ در آزمایشگاه با مقیاس $\frac{1}{10}$ ساخته می شود. اگر نسبت سرعت ها $\frac{V_p}{V_m} = 2$ باشد، آنگاه توان لازم برای پمپ مدل چند وات خواهد بود؟ (سیال در مدل و نمونه اصلی آب است.)

ابتدا وضعیت متغیرها و پارامترهای بدون بعد را مشخص می کنیم:

$$f(N, \rho, V, l) = 0$$

$$N \equiv ML^2T^{-3}, \ \rho \equiv ML^{-3}, \ V \equiv LT^{-1}, \ l \equiv L \ , \ j = n - m = 4 - 3 = 1$$

حال با استفاده از روش رایتمایر-هانساکر، پارامتر بدون بعد را تعیین کنید:

$$L \equiv l$$

$$V \equiv LT^{-1} \equiv lT^{-1} \Rightarrow T \equiv \frac{l}{V}$$

$$\rho \equiv ML^{-3} \equiv Ml^{-3} \Rightarrow M \equiv \rho l^3$$

با برابر قرار دادن عدد بدون بعد π ، در مدل و نمونه اصلی خواهیم داشت:

$$N \equiv ML^2T^{-3} \equiv (\rho l^3)(l^2)\left(\frac{l}{V}\right)^{-3} \equiv \rho V^3 l^2 \Rightarrow \pi = \frac{N}{\rho V^3 l^2}$$

$$(\pi)_m = (\pi)_p \Rightarrow N_r = \left(\frac{\rho_m}{\rho_p}\right) V_r^3 L_r^2 \Rightarrow \frac{N_m}{100} = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$\Rightarrow N_m = \frac{1}{8} kW = 125W$$

تمرین ۸: برای مدل کردن پدیده ضربه قوچ در سیالی که با دانسیته ۸۰۰ kg/m3 و سرعت ۲ m/s در مجرای اصلی جریان دارد. سیالی با دانسیته ۱۰۰۰ kg/m3 و سرعت ۰.۵ m/s در آزمایشگاه شبیه سازی می شود. ضریب بالک در نمونه اصلی چند برابر ضریب بالک مدل است؟

با به کارگیری تشابه ماخ بین مدل و نمونه اصلی داریم:

$$(M)_m = (M)_p \Rightarrow V_m\sqrt{\frac{\rho_m}{K_m}} = V_p\sqrt{\frac{\rho_p}{K_p}} \Rightarrow V_r^۲ = (\frac{K_m}{K_p})(\frac{\rho_p}{\rho_m})$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(\frac{۰/۵}{۲})^۲ = (\frac{K_m}{K_p})(\frac{۸۰۰}{۱۰۰۰}) \Rightarrow \frac{K_p}{K_m} = ۱۲/۸$$

تمرین ۹: جریان آشفته آب با سرعت ۴ m/s در یک لوله افقی برقرار است. با مدل سازی جریان آب در آزمایشگاه و اندازه گیری افت فشار در طول لوله، عدد ۴ kpa به دست آمده است. اگر افت اصطکاکی در لوله اصلی با رابطه $h_f = 2\frac{V^2}{2g}$ بیان شود. سرعت جریان در مدل آزمایشگاهی چند m/s است؟

با برقراری تشابه اویلر بین مدل و نمونه اصلی داریم:

$$(Eul)_m = (Eul)_p \Rightarrow \frac{\Delta P_m}{\rho_m V_m^۲} = \frac{\Delta P_p}{\rho_p V_p^۲} \Rightarrow V_r^۲ = (\frac{\rho_p}{\rho_m})\Delta P_r$$

$$(\frac{\Delta P}{\gamma})_p = h_f = ۲(\frac{v}{۲g}) = ۲\times(\frac{۲}{۲\times۱۰}) = ۱/۶\ m \Rightarrow \Delta P_p = ۱/۶\times۱۰ = ۱۶\ kPa$$

$$(\frac{V_m}{۴})^۲ = (۱)(\frac{۴}{۱۶}) \Rightarrow V_m = ۲\ m/s$$

تمرین ۱۰: در نظر است تا یک جت آب که با سرعت ۶ m/s فوران می کند، با مقیاس $\frac{1}{10}$ در آزمایشگاه مدل سازی شود. اگر سرعت جت آب در آزمایشگاه ۲ m/s باشد و اختلاف فشار داخل و خارج جت استوانه ای نیز ۲ kpa اندازه گیری شود، فشار نسبی داخل جت در نمونه اصلی چند kpa است؟

با توجه به اختلاف فشار بین داخل و خارج جت استوانه ای، بایستی از تشابه اویلر استفاده کرد:

$$(Eul)_m = (Eul)_p \Rightarrow \Delta P_r = (\frac{\rho_m}{\rho_p})V_r^۲ \Rightarrow (\frac{۲}{\Delta P_p}) = (۱)(\frac{۲}{۶})^۲ \Rightarrow \Delta P_p = ۱۸\ kPa$$

تمرین ۱۱: یک جسم شناور به طول ۸ متر در آب به دانسیته 1000 kg/m3 حرکت می کند. طول مورد نیاز برای مدل کردن این جسم در الکل اتیلیک به دانسیته 800 kg/m3 چقدر است؟ نیروهای موثر در این مسئله ثقل و کشش سطحی می باشند و کشش سطحی در مدل و نمونه اصلی به ترتیب برابر 0.015 N/m و 0.075 N/m است.

با توجه به این که نیروهای ثقل و کشش سطحی (همراه با اینرسی) نیروهای موثر در مسئله می باشند. بنابراین باید تشابه فرود و تشابه وبر به صورت توأم برقرار گردد. در این حالت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (We)_m = (We)_p \;\Rightarrow\; \dfrac{\rho_m V_m^2 l_m}{\sigma_m} = \dfrac{\rho_p V_p^2 l_p}{\sigma_p} \;\Rightarrow\; V_r^2 = \dfrac{1}{L_r}\left(\dfrac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\dfrac{\sigma_m}{\sigma_p}\right) \\ (Fr)_m = (Fr)_p \;\Rightarrow\; V_r = \sqrt{L_r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_r^2 = \left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_p}\right) \;\Rightarrow\; \left(\frac{L_m}{8}\right)^2 = \left(\frac{1000}{800}\right)\left(\frac{0/015}{0/075}\right) \;\Rightarrow\; L_m = 4\,m$$